Jarek Rygielski
RECHTECKUMWANDLUNG

Motive

Atelier für Grundlagen an der Hochschule für bildende Künste in Hamburg. Fotografiert in Richtung Nord-Osten. Vorentwurf für eine Großaufnahme mit einer Spezialkamera.
JR 21.04.2005-29.04.2005

Ich möchte Ihnen von einer einfachen Konstruktion berichten, die - wie ich finde – interessante Zusammenhänge im Bereich der Proportionslehre aufzeigt. Bevor ich jedoch zu dieser Konstruktion komme, möchte ich vorab etwas zu ihrer Vorgeschichte erzählen.

Diese beginnt im Atelier von Professor Lambert Rosenbusch an der Hochschule für bildende Künste in Hamburg. Wenn jemand als Student (meistens der Fachrichtung Industrial Design oder Architektur) das Atelier von Prof. Rosenbusch für sich entdeckte, dann merkte er sofort, dass es dort andere Entwurfsregeln herrschen als sonst in der breiten Künstler- und Architektenszene. Es war aber auch kein Atelier der Proportionslehre - wie man sich denken könnte. Proportionen waren dort nicht das einzige oder gar beherrschende Thema der Beschäftigung und Forschung - dieses war nämlich die Erfindung. Nicht die subjektive Ästhetik sondern die Erfindung und objektive Richtigkeit war maßgebend für die Schönheit. Schön war das, was richtig war. Dabei muss ich hinzufügen, dass ich mit meiner Beschreibung lediglich die Stimmung nahe bringen möchte – so wie ich sie empfunden habe.

Die Umgebung vom Meister und Kollegen, die bei jeder kleinsten Entwurfstätigkeit den heute geläufigen Begriff der Kunst bei Seite legen und sich dem Geist der Erfindung widmen war natürlich sehr inspirierend und ermutigend. Selbstverständlich wollte ich genauso Arbeiten und Forschen, und dazu gab es viele Gelegenheiten. Eine davon betraf die große Entdeckung von Professor Rosenbusch – die Proportion cubi ratio. Von ihrer Existenz erfuhr ich im Grunde ziemlich spät, was eigentlich nicht so schlimm ist - denn viele, die über dass Atelier gegangen sind, wissen es bis heute nicht, dass es für die flächige Proportion sectio aurea[1] also dem goldenen Schnitt

1 Der goldene Schnitt (sectio aurea) "Dieses wahrscheinlich schon bei Platon bekannte und von Euklid beschriebene Teilungsverhältnis teilt eine gegebene Strecke in zwei ungleiche Abschnitte, deren kleinerer sich zum größeren verhält wie dieser zur ganzen Strecke, formelhaft ausgedrückt a:b =b:(a+b). In rationalen Zahlen ist diese in beide Richtungen sekzessiv fortsetzbare Teilung (...) nicht auszudrücken." Naredi-Reiner, Architektur und Harmonie p185
Aus ästhetischer Sicht ist der goldene Schnitt ein Seitenverhältniss eines Rechteckes, das als die wohlproportionierte Rechtecksproportion gilt und in der Kunst und der Architektur oft als solche verwendet wurde.

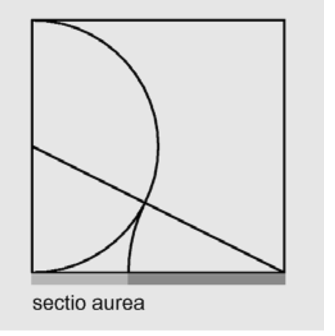
2 Obwohl die Proportion des goldenen Schnitts oft in der Architektur und der räumlichen Kunst eingesetzt wird, ist sie eine flächige Proportion und gibt keinen Aufschluss über die dritte Dimension. (L. Rosenbusch Räumliche Proportionen) So lange die Architektur über die Fassaden- und Raumbegrenzungsflächen entworfen und verstanden wurde (z.B. in der Frührenaissance), kam es zu keinem Widerspruch zwischen der zweidimensionalen Theorie und der dreidimensionalen Praxis. Jedoch schon Leon Battista Alberti 1404-1472 macht in

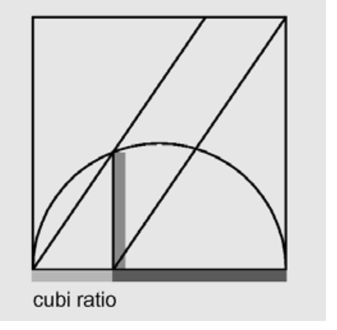
eine räumliche Entsprechung[2] gibt, und dass für diese Entdeckung kein anderer als Prof. Lambert Rosenbusch verantwortlich ist.
Ahnungslos fing ich mit einer kleinen Entwurfsarbeit an. Das Ziel war scheinbar einfach: Ein Körper in den cubi ratio Proportionen soll in Gusseisen gegossen werden. Auf einer Seite sollte die zweidimensionale Entsprechung dieser Proportion also der goldene Schnitt herausgefräst sein. Der Anspruch war die beiden Proportionen auf eine logische Weise zu verknüpfen und so für eigene Zwecke einen Anschauungsobjekt herzustellen, dass nebenbei auch eine praktische Funktion erfüllen sollte.

Um mit der Entwurfsarbeit anzufangen musste ich erst die Proportion cubi ratio zeichnen. Nach mehreren Tagen oder gar Wochen die ich mit Konstruktionsversuchen erfolglos verbrachte, erfuhr ich von den so genannten delischen Problemen[3], also von geometrischen Aufgaben, die mit den Mitteln der euklidischen Geometrie nicht konstruierbar sind. Zu den klassischen delischen Problemen gehören neben der Namensgeberin – der Würfelverdoppelung, die Quadratur des Kreises und die Dreiteilung des Winkels. Die Proportion cubi ratio ist höchstwahrscheinlich analog zu den genannten Aufgaben ebenso nicht konstruierbar mit den Mitteln der euklidischen Geometrie[4]. Meine Versuche hatten demnach überhaupt keine Erfolgschancen.
Das delische Problem oder genauer gesagt das zu dem delischen analoges Problem war erst der Anfang der Probleme bei dieser scheinbar einfachen Aufgabe. Sie können schon wahrscheinlich ahnen, dass diese kleine Arbeit, die ich mir selber gestellt habe, immer noch nicht fertig ist.

Trotzdem war es kein Fehler sich mit dieser Aufgabe zu beschäftigen. Denn sie war der Anfang meiner Beschäftigung mit Proportionen und Geometrie, die ich bis Heute weiterverfolge.

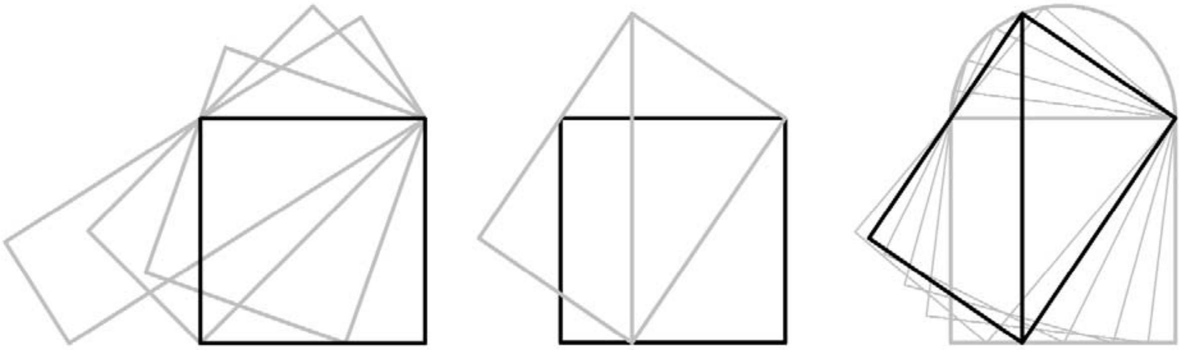
seinen Zehn Büchern über die Baukunst Angaben zur Bestimmung der Höhe in Gebäuden – u.a. über mittlere Proportionalen (arithmetische, geometrische und sog. musikalische). 1979 entdeckte Prof. L. Rosenbusch bei seiner Forschung zur Proportion des Raumes eine räumliche Entsprechung der flächigen Proportion des goldenen Schnittes. (vgl. L. Rosenbusch , Industrial Design



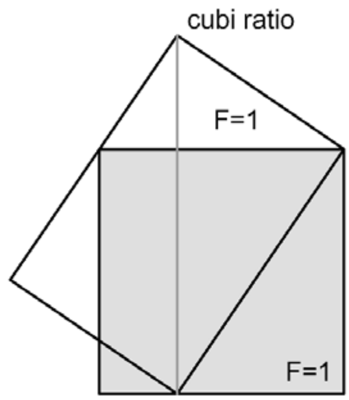


3 Der kleine Pauly 5, p.390ff;

4 L. Rosenbusch, Industrial Design 06, Räumliche Proportionen

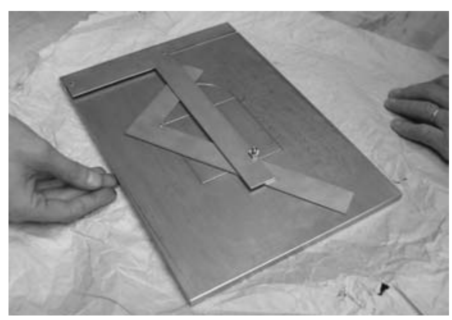


Cubi ratio aus Quadrat



Eines Tages gelang es mir aus einer der Flächen der cubi rario Proportion ein Quadrat mit dem gleichen Flächenmaß zu konstruieren. Obwohl ich schon dutzende „große" Enttäuschungen mit kurzlebigen Entdeckungen erlebte, war die Aufregung riesig. Am Anfang war die Konstruktion noch ziemlich kompliziert und verflochten. Es galt jetzt alles Überflüssige zu entfernen und ausschließlich das Wesentliche zu behalten. Das Ergebnis war erstaunlich einfach. Ich stellte das cubi ratio Rechteck auf eine der Ecken, so dass seine Diagonale senkrecht nach oben zeigte. Dann spannte ich eine Figur zwischen zwei Ecken und einer Seite des Rechteckes. Die Figur, die auf diese Weise entstand war ein Quadrat. Das war aber noch nicht alles, denn dieses Quadrat hatte genau die gleiche Fläche wie das Ausgangsrechteck. Eine Konstruktion der Proportion cubi ratio mit den Mitteln der euklidischen Geometrie schwebte mir schon vor. (letztendlich gibt es bis heute noch keinen Beweis, dass es nicht möglich ist) Ich hatte ein Quadrat, eine senkrechte Diagonale zwei gleiche Flächenmaße und drei Berührungspunkte. Bei so vielen Angaben musste es einfach klappen cubi ratio zu konstruieren. Die Enttäuschung war groß als ich feststellte, dass die Bedingung des gleichen Flächenmasses, keinen Sonderfall darstellt - ohne zu erkennen, dass diese an sich sehr interessant ist.

Immer noch aufgeregt rief ich Prof. Rosenbusch an. Er war begeistert, und es schwebte ihm schon eine cubi ratio Maschine[5] vor, die er auch wenig später konstruierte.

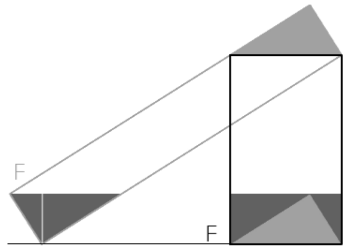


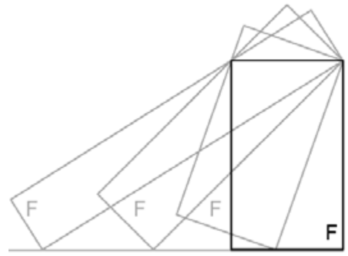
Proportionsmaschiene cubi ratio,
Design Lambert Rosenbusch mit Jarek Rygielski und Alexander Holtkamp
Stahl 248x362x28mm,
vgl. L. Rosenbusch, Industrial Design 06, Räumliche Proportionen

5 Die mit den euklidischen Mitteln nicht konstruierbare Proportion cubi ratio lässt sich mittels der Proportionsmaschiene auf bewegungsgeometrischen Wege ermitteln.

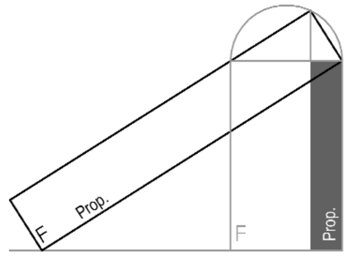
cubi ratio - ein Sonderfall einer Regel

Über die Rechteckumwandlung gelang es die Proportion cubi ratio als Ableitung eines Quadrates darzustellen. Dabei ist dies nur ein Sonderfall einer allgemeinen Regel. Mit Hilfe dieser kann aus einem beliebigen Rechteck ein Anderes gleicher Fläche und einer frei gewählten Kantenlänge gezeichnet werden. Es ist also eine flächengleiche Rechtecksumwandlung. Dabei wird von einer Ecke des Ausgangsrechtecks die gewünschte Kantenlänge so abgetragen, dass sie auf seiner Standlinie endet. Jetzt reicht es diese Kante so weit parallel zu verschieben, dass sie auf der zweiten Ecke des Rechteckes liegt. Alle so gezeichnete Rechtecke haben die Fläche des Ausgangsrechteckes.





Interessant ist, dass bei dieser Umwandlung, die Proportion des neuen Rechteckes in dem Ausgangsrechteck ablesbar ist (hier grau dargestellt). Diese Tatsache ermöglicht eine Skalierung einer beliebigen Proportion auf ein beliebiges Flächenmaß[6]. Die Konstruktion wird hierfür um einen Thaleskreis erweitert. Ausgehend also von einer Darstellung einer ganz bestimmten Proportion (cubi ratio) kommt man wieder zu einer allgemeinen Anwendung beim Umgang mit Proportionen, die als flächenbestimmte Proportionsskalierung zu bezeichnen wäre.

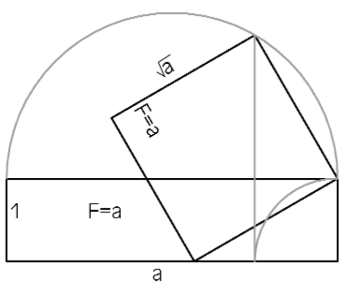


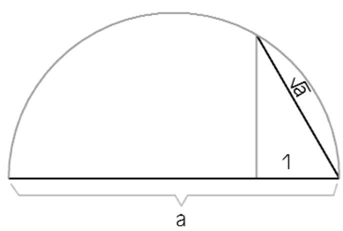
Proportionsskalierung

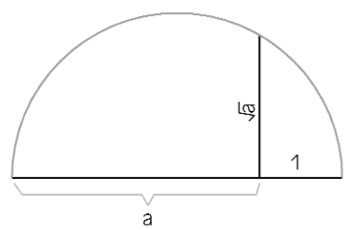
Ein Sonderfall der Rechteckumwandelung stellen Konstruktionen dar, die von einem Quadrat ausgehen, oder umgekehrt, die zu einem Quadrat führen. (In diesen Fällen sind die Konstruktionen dem Kathetensatz des Euklid[8] gleich zu setzen.) Außer der besprochenen Proportion cubi ratio, kommt man dann zur Ermittlung des Quadratwurzels einer beliebigen reellen Zahl indem ein Rechteck des Flächenmasses a in ein Quadrat gleichen Flächenmasses umgewandelt wird[7]. (vgl. Quadratwurzel nach Descartes, Kathetensatz des Euklid, Höhensatz des Euklid)

6 Voraussetzung - es ist ein Rechteck mit dem gewünschten Flächenmaß gegeben. Die Ausgangsproportion wird in dem Rechteck durch eine Senkrechte zu seiner Standlinie ausgewiesen. Der Schnittpunkt der Gerade mit dem Halbkreis auf der Oberseite des Hauptrechtecks weist die zweite Ecke der skalierten Proportion des Proportionsrechtecks aus.

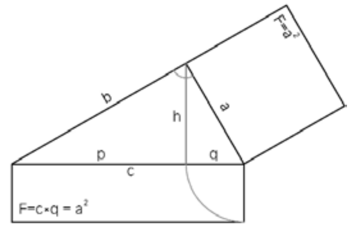
7 Umkehrkonstruktion zur Skalierung einer Proportion. In dem Ausgangsrechteck wird ein Quadrat abgetragen. Weitere Konstruktion analog zur Proportionsskalierung.





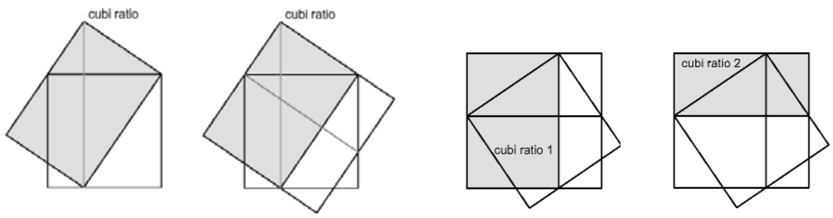


links: Quadratwurzel konstruiert aus Rechtecksumwandlung;
mitte: Quadratwurzel konstruiert aus Rechtecksumwandlung; bereinigt
rechts: Quadratwurzel nach Descartes nach dem Höhensatz des Euklid

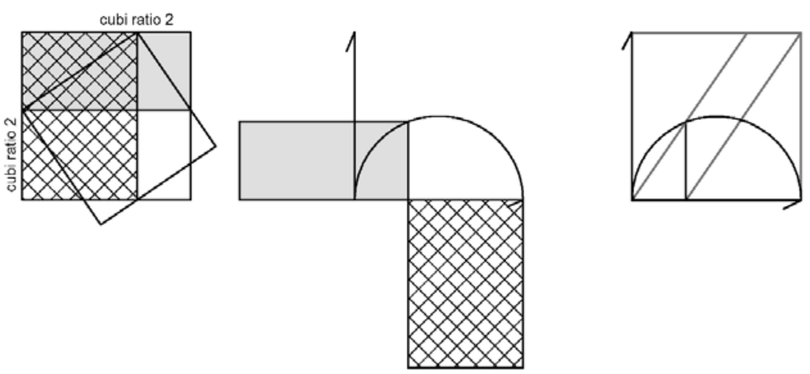


8 Kathetensatz des Euklid

Erweiterung der Konstruktion

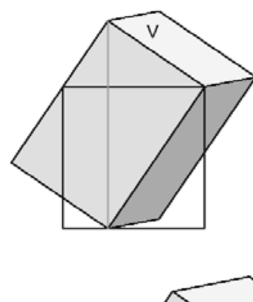


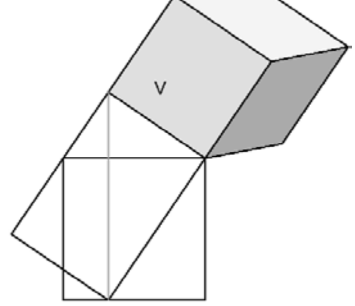
Interessant ist eine kleine Erweiterung dieser Konstruktion. Hier am Beispiel von cubi ratio dargestellt, jedoch allgemein gültig. Eine bestimmte Ergänzung des Rechteckes führt überraschend zu einem zweiten Quadrat. (Eine Drehung der Zeichnung erhebt dieses zu dem Hauptquadrat und erleichtert so die Betrachtung.) Es entstanden zwei Quadrate. Die Verbindungslinien ihrer Schnitt- und Berührungspunkte bilden einen 90° Kreuz. Auf diese Weise wird zu jeder Proportion eine neue abgeleitet, die in der Lage gedreht ist. In diesem speziellen Fall entstand so die zweite Seite des cubi ratio Quaders, die von der ersten abgeleitet wurde. Natürlich stellt sich die Frage was sind es für Rechteckspaare im Allgemeinen, also dann wenn aus dem Ausgangsquadrat ein anderes beliebiges Rechteck abgeleitet wird, und durch die Erweiterung der Konstruktion ein zu ihm gehöriges Partnerrechteck ermittelt wird. Die Flächenmaße der Rechtecke verhalten sich so zueinander, dass sie in ein Koordinatensystem übertragen einen Halbkreis bilden[9]. Bei cubi ratio kommen wir hier wieder zu der uns bekannten Darstellung der Proportion von Prof. Lambert Rosenbusch.



Rechteckumwandlung 2/3

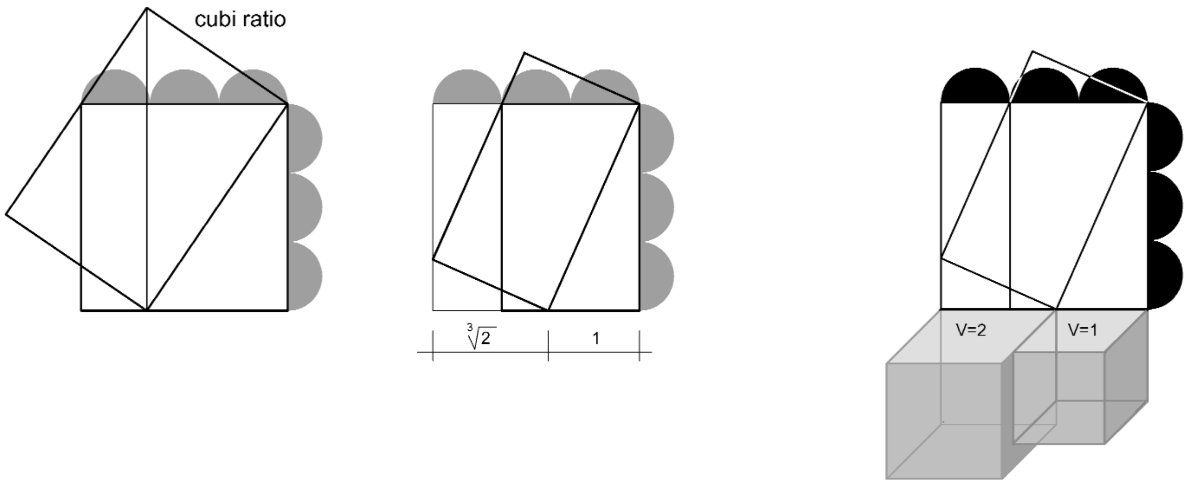
Bewusst bemühe ich mich die Proportion cubi ratio nur oberflächlich zu behandeln, ohne auf ihre Eigenschaften einzugehen, denn dass würde den Rahmen dieses Beitrages sprengen. Trotzdem möchte ich eine Eigenschaft des cubi ratio Quaders anführen, die für meine weitere Betrachtung von Bedeutung ist. Das Volumen des cubi ratio Quaders ist demnach gleich dem Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge der mittleren Kante des Quaders. Wenn also in der Konstruktion der Rechteckumwandlung die Proportion cubi ratio eine Sonderrolle spielt, liegt die Vermutung nahe, dass auch der Würfel in der Konstruktion verborgen ist, denn zumindest durch seine Kantenlänge ist er dort vertreten. Diese fast romantische Überlegung, bewegte mich zur weiteren Untersuchung der Rechteckumwandlung unter diesem Aspekt.
Und es ist tatsächlich so. Die besprochene Konstruktion zeigt interessante Zusammenhänge beim Hexaeder.





9 Das Verhältnis der Flächen der Rechteckpare kann durch die Längen der kurzen Seiten der Rechtecke ausgedrückt werden, da die langen Seiten beider Rechtecke gleich sind. (Bei dieser Betrachtung, bleibt nicht das ursprüngliche, sondern das abgeleitete Quadrat konstant.). Das Verhältnis der Flächen ist eine Funktion des Kreises:
$(F_1-R)^2+ F_2^2 = R^2$
R= Radius, Seitenlänge des Quadrates

Bei konstantem Hauptquadrat bilden die Längen der kurzen Seiten der Rechtecke ebenfalls eine Kreisfunktion.
$a_1^2 + a_1^2=R^2$
a_1,a_1= kurzen Seiten der Rechtecke
R= Diagonale des Ausgangsquadrates



In diesem Fall wird nicht ein Quadrat zum Ausgangsrechteck, (so wie bei cubi ratio) sondern die Proportion 2/3. Wie gewohnt wird das Rechteck flächengleich gestreckt. Jetzt wird doch noch ein Quadrat gebraucht, nämlich um die linke äußere Ecke des neuen Rechteckes zu positionieren. Die soll auf der linken Quadratseite liegen. Scheinbar einfache Aufgabe jedoch mit euklidischen Mitteln nicht konstruierbar.
Interessant ist die Teilung der Standlinie des Quadrates durch das auf einer Ecke stehende Rechteck. Wenn man nämlich Würfel mit der Kantenlänge der beiden Teilstrecken baut, ist das Volumen des größeren Würfels genau doppelt so groß wie das des kleineren. Es ist also das delische Problem[10]. Die Ecke des Rechecke s teilt die Standlinie des Quadrates im Verhältnis 1/(3. Wurzel 2). Es ist keine euklidische Lösung des Problems, denn schon (oder erst) im 19.Jh wurde bewiesen, dass es nicht möglich ist 3.Wurzel 2 zu konstruieren. Lösungen[11] gab es durch Verwendung von Kurven höheren Grades oder durch Bewegungsgeometrie wie die Proportionsmaschiene von Albrecht Dürer[12].

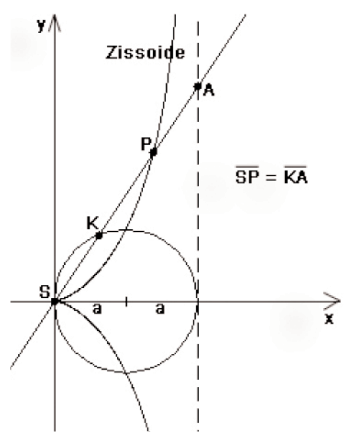
Das Interessante an der Darstellung des delischen Problems durch die Umwandlung der Proportion 2/3 ist, dass sie aus einer besonderen Stellung von Flächen hervorgeht. Das macht diese Konstruktion greifbarer als Linienkonstruktionen. Geraden und Kurven sind Begriffe die für die Menschen wesentlich weiter von der körperhaften Welt entfernt sind als Flächen. Die Proportion wird hier durch ein Bild dargestellt.

Inspiriert durch die einfache geometrische Form, entwarf ich ein Gerät mit dem die Proportion 1/(3. Würzel 2) auf mechanischem Wege grafisch zu ermitteln ist. Ich lies aus einer 5mm starken Edelstahlplatte 3 Teile per Laserschnitt herzustellen. Da die Entwurfsphase relativ viel Zeit beanspruchte, gab es keine Zeit mehr in Modellen zu untersuchen, wie sich die Teile in der Praxis verhalten, und ob sie sich diese überhaupt in Stellung bringen lassen. Deshalb war der Einbau einer Magnetkante zwischen den beiden kleineren Teilen geplant, um eine gleitende Bewegung der Teile zu ermöglichen. Nachdem ich jedoch nach dem Laserschneiden das erste Mal die fertigen, rohen Einzelteile in die Position zu bringen versuchte, war ich selber erstaunt, wie gut sich die Konstellation durch das Schieben entlang der linken Kante des Quadrates in der entscheidenden Stellung festfährt und stehen bleibt. Sie bedarf deshalb keinerlei Hilfsmittel mehr.

Zum Schluss möchte ich noch eine Bemerkung loswerden.

10 Das delische Problem gehört neben der Quadratur des Kreises und der Dreiteilung des Winkels zu den berühmten, mit Zirkel und Lineal nicht lösbaren Problemen der Antike. Nach einer Legende baten die Bewohner der Insel Delos, während einer Pestepidemie 430 v. Chr., das Orakel von Delphi um Rat. Nach dem Orakelspruch sollte, um die Pest zu beenden, der Altar im Tempel des Apollon, in seinem Volumen verdoppelt werden. Der Altar hatte die Form eines Würfels uns sollte nur mit Verwendung von Zirkel und Lineal (also mit den Mitteln der klassischen Geometrie) verdoppelt werden. Die Unlösbarkeit dieser Aufgabe konnte mithilfe der Theorie von Evariste Galois (französischer Mathematiker) erst im 19.Jhd. nachgewiesen werden. (Die irrationale Zahl 3.Wurzel aus 2 kann nicht durch ganze Zahlen, die vier Grundrechenarten und Quadratwurzeln ausgedrückt werden) Brockhaus MM2005; Wikipedia, die freie Enzyklopädie

11 Für die Lösung des delischen Problems der Würfelverdoppelung gab es schon in der Antike Beispiele (Eratosthenes, Apollonios von Perge, Archytas und Heron von Alexandreia, Platon), die jedoch auf der Verwendung von Kurven höheren Grades beruhlten bzw. auf Bewegungsgeometrie. Wikipedia, die freie Enzyklopädie

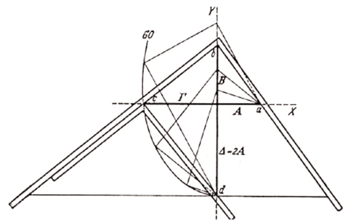


Zissoide des Diokles (um 100 v.Chr.)

Fortsetzung auf der folgenden Seite

Da diese Konstruktionen von den ich gesprochen habe recht einfach sind, ist es möglich dass sie bereits bekannt sind. Unsere bisherige Recherche ergab bisher keine Resultate. In jedem Fall sind die Zusammenhänge die durch diese einfache Konstruktion zu Tage kommen äußerst interessant. Da ich kein Mathematiker vom Beruf bin, und meine Beschäftigung mit der Geometrie als ein Teilbereich des Berufes eines Architekten oder Designers betrachte, darf ich mir eine weniger wissenschaftliche Interpretation erlauben.

Es ist schon bemerkenswert, dass mit der gleichen zweidimensionalen Konstruktion zwei räumliche Probleme darstellbar sind. Bei einem wird ein Würfel, also neben einer Kugel der vollkommene Körper im Volumen verdoppelt. Bei dem Anderen wird ein Quader erzeugt, der offensichtlich eine Ableitung des Würfels gleichenVolumens ist[13]. Für die Konstruktion der Rechteckumwandlung kann das heißen, dass sie im Grunde eine Momentaufnahme, ein bestimmter Schnitt des dreidimensionalen Raumes darstellt. Dafür spricht auch die Tatsache, dass unsere Sonderfälle nicht konstruierbar sind. Für den cubi ratio Quader kann dass als ein weiteres Hinweis auf eine direkte Abstammung vom Urkörper - dem Würfel - interpretiert werden.



Der sog. Platonischer Kreuz zur mechanischen Ermittlung der Würfelverdoppelung.
Der kleine Pauly 5, Lexikon der Antike, p.1393

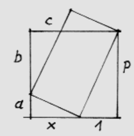
12 vgl. L. Rosenbusch, Industrial Design 06

13 Umformung des Urbildes - des Würfels- in einen inhaltsgleichen Quader der Proportion „cubi ratio", vgl. L. Rosenbusch, Räumliche Proportionen

$\mathrm{I}\ \boxed{\frac{1}{p}=\frac{c}{b}}$ $\quad$ $\mathrm{II}\ \boxed{c=\frac{p}{3}}$ $\quad$ $\mathrm{III}\ \boxed{a=p-b}$

$$\Downarrow$$
$$b=pc$$
$$\Downarrow \boxed{\mathrm{II}}$$
$$b=p\,\frac{p}{3}$$
$$(1)\quad b=\frac{p^2}{3}$$

$$\Downarrow (1)$$
$$(2)\quad a=p-\frac{p^2}{3}$$



$\mathrm{IV}\ \boxed{\frac{a}{x}=\frac{1}{p}}$ $\quad$ $\mathrm{V}\ \boxed{p=x+1}$

$$\Downarrow$$
$$x=pa$$
$$\Downarrow (2)$$
$$x=p\left(p-\frac{p^2}{3}\right)=\frac{3p^2-p^3}{3}$$
$$\boxed{\mathrm{V}} \Rightarrow x=\frac{3(x+1)^2-(x+1)^3}{3}$$
$$x=\frac{3x^2+6x+3-x^3-2x-x-x^2-2x-1}{3}$$
$$x=-\frac{1}{3}x^3+x+\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}x^3=\frac{2}{3}$$
$$x^3=2 \Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$$

02/2006 J.R.

Drei Bleche für Würfelverdopplung.
Jarek Rygielski 2006, Edelstalh 5mm, 200x200mm, Laserschnnitt

Literatur

Paul von Naredi-Rainer, Architektur und Harmonie, Köln 1999
Lambert Rosenbusch, Industrial Design 06, Schwerin 2006
Der kleine Pauly, Lexikon der Antike, dtv München 1975
Brockhaus Multimedial 2005
Wikipedia, die freie Enzyklopädie
4000 Jahre Algebra, Springer-Verlag GmbH, 2003
Leon Battista Alberti, Zehn Bücher über die Baukunst, Florenz 1485

Jarek Rygielski Dipl.-Ing.
Architektur und Städtebau
www.j-rygielski.de
mail@j-rygielski.de

Hamburg, April 2006